Liceo Scientifico Statale S. Cannizzaro

Esame di stato 2021

Classe 5A

Tracce di Matematica e Fisica per l'elaborato

- **TRACCE**

a. **Discuti l'evoluzione del concetto di tempo da Newton a Einstein fino alle conseguenze degli assiomi della Relatività Ristretta, analizzando anche matematicamente i casi limite del fattore lorentziano. Analizza le categorie che stanno alla base della conoscenza filosofica.**
b. **Analizza un modello matematico nello sviluppo di una pandemia e studiane la funzione, analizzando il raggiungimento del picco e della ridiscesa.**
c. **Discuti la nascita del concetto di onda elettromagnetica ad opera di Maxwell e il ruolo delle telecomunicazioni nella II Guerra Mondiale.**
d. **Riassumi la cosiddetta guerra tra Edison e Tesla per la produzione della corrente elettrica e analizza dal punto di vista matematico le funzioni che descrivono nel tempo la corrente alternata. Descrivi il ruolo dell'elettricità nei movimenti artistici di inizio '900.**
e. **Descrivi il funzionamento del PickUp di una chitarra elettrica e il principio fisico che ne sta alla base. Riassumi il contesto storico e culturale che portò alla nascita della Beat generation.**
f. **Le straordinarie capacità metaboliche e riproduttive dei procarioti vengono sfruttate anche nella bonifica dei siti inquinanti, attraverso il cosiddetto biorisanamento. Sviluppa un protocollo utilizzando i batteri per il trattamento delle acque reflue o di terreni contaminati. Analizza il tipo di curva di crescita di una coltura batterica e studiane la funzione correlata, determina le variabili in gioco, definiscine i margini di applicazione.**
g. **La bioinformatica è la scienza che sviluppa algoritmi e software per l'analisi di dati biologici. Approfondisci questa nuova branca delle scienze e presentane uno studio.**
h. **La ricerca di un modello che permetta l'analisi e la comprensione di un fenomeno non è sempre facile e a volte si arriva all'accettazione del suo non-raggiungimento. Analizza l'indeterminazione tra Matematica , Fisica e Filosofia.**

i. **La catastrofe ultravioletta a inizio '900 mise in discussione tutte le certezze degli scienziati che constatarono la duplice natura non solo della luce ma dell'elettrone stesso. Descrivi la crisi della fisica classica servendoti del concetto di integrale improprio.**
j. **La quantizzazione dell'energia nella struttura atomica di Bohr sembra essere l'unica soluzione per giustificare la stabilità dell'atomo. Discuti la discontinuità dal punto di vista Matematico, Fisico e artistico.**
k. **Il magnetismo è un fenomeno naturale che possiede incredibili proprietà ed è alla base del funzionamento dei treni a levitazione magnetica. Descrivine il funzionamento.**
l. **L'Agenda 2030 promuove lo sviluppo sostenibile e pone come priorità il raggiungimento di energia pulita per l'ambiente. Descrivi il funzionamento delle pale eoliche descrivendo come si possa sfruttare il moto circolare uniforme per ottenere corrente indotta.**
m. **Le nuove frontiere della ricerca: dall'origine dell'universo alle particelle e alla massa oscura. Analizza un campo di ricerca ancora aperto mettendone in rilievo le applicazioni.**
n. **In una celebre conferenza tenutasi a Parigi l'8 agosto del 1900 il matematico Hilbert presentò una lista di problemi irrisolti che hanno avuto un notevole impatto nella matematica del XX secolo. Analogamente il 24 maggio 2000 l'istituto matematico Clay ha istituito il Millennium Prize Problems. La prima persona che risolverà ciascuno dei problemi proposti vincerà un milione di dollari messo in palio dal CMI. Analizza un problema contenstualizzandolo dal punto di vista storico e scientifico.**

- **PROBLEMI**

Problema n. 1 : la legge di Ampère

Analizza la rivoluzione scientifica alla fine dell'Ottocento e il ruolo che ha avuto nella società il processo di industrializzazione. Risolvi il seguente problema.

Due fili rettilinei posti perpendicolarmente al piano del foglio sono percorsi da correnti entranti e di uguale intensità $i_1 = i_2 = i_0$.

Supponiamo che i due fili si trovino a una distanza $2d$ tra i loro centri. Il diametro dei fili è trascurabile rispetto a d. Scegli un sistema di riferimento con l'asse delle ordinate giacente nel foglio e passante per il centro dei due fili. L'origine degli assi corrisponde al punto medio tra i centri dei due fili che hanno coordinate $(0; -d)$ e $(0; d)$. Il verso positivo dell'asse y è orientato verso l'alto del foglio, mentre il verso positivo dell'asse x è orientato verso destra. Le coordinate sono espresse in metri.

1. Scrivi la funzione $B(x)$ che rappresenta il campo magnetico risultante, generato dalle due correnti, in un punto $P(x; 0)$.

Supponi $d = 1{,}0\ \text{m}$ e $i_1 = i_2 = i_0 = 1{,}0\ \text{A}$.

2. Studia la funzione $B(x)$ così ottenuta.

3. Considera il cammino chiuso γ che ha come bordo la funzione $y = f(x) = -\sqrt{5 - x^2 - 4x}$ e la porzione dell'asse delle ascisse compresa tra i punti $A(-5{,}0;0)$ e $B(1{,}0;0)$ Determina la circuitazione del campo magnetico lungo il cammino γ.
4. Se la corrente che circola nei fili non fosse costante ma variasse nel tempo in maniera sinusoidale, $i_1(t) = i_2(t) = i_0 \cos \omega t$, con $\omega = 314 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ e $t \in \mathbb{R}$, la risposta alla domanda **3.**, calcolata per $t = 0$ cambierebbe?

Problema n. 2: Condensatori e corrente di spostamento

Analizza le applicazioni dei condensatori nel Theremin e risolvi il seguente esercizio.

1. Considera la famiglia di funzioni $f_k: [0; +\infty[\to \mathbb{R}$, definita ponendo $f_k(x) = 1 - e^{-\frac{x}{k}}$, con k parametro reale positivo. Verifica che si tratta di funzioni crescenti, indipendentemente dal valore di k, e dotate di un asintoto orizzontale. Traccia un grafico qualitativo di una funzione della famiglia, deducendolo da quello di funzioni elementari.
2. Poni $\lim_{x \to +\infty} f_k(x) = L$ e risolvi la disequazione $|f_k(x) - L| < \varepsilon$, dove ε è un parametro positivo arbitrario.

Un condensatore piano ideale, con armature circolari di raggio R, viene collegato a un generatore di corrente continua.

3. Dimostra che il campo magnetico indotto a distanza $r < R$ dall'asse del condensatore può essere espresso dalla formula
$$B = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{r}{2} \cdot \frac{dE}{dt},$$
dove il termine $\frac{dE}{dt}$ rappresenta la variazione istantanea del campo elettrico tra le armature.
4. Dimostra che, durante la fase di carica, la corrente di spostamento tra le armature è espressa da
$$i_s = \frac{Q_0}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}},$$
dove Q_0 rappresenta la carica depositata sull'armatura positiva del condensatore al termine del processo.
5. Le armature del condensatore hanno raggio $R = 10$ cm. Sapendo che il condensatore può dirsi completamente carico dopo $\Delta t = 5\tau = 1{,}5$ s e che $Q_0 = 5{,}6 \cdot 10^{-7}$ C, calcola il campo magnetico indotto a distanza $r = \frac{R}{5}$ dall'asse del condensatore dopo $\Delta t' = 1{,}0$ s.

Problema n. 3: Integrali impropri ed effetto fotoelettrico

Rifletti sul dibattito a proposito della natura della luce, del funzionamento delle celle fotovoltaiche e del tema dell'ambiente nell'Obiettivo 7 dell'Agenda 2030. Risolvi il seguente problema:

Considera la funzione $f(x)$, definita per $x \in \mathbb{R}$:
$$f(x) = axe^{-\frac{x^2}{b}},$$
con a e b costanti reali positive.

1. Dimostra che il grafico di $f(x)$ presenta un punto di massimo relativo, un punto di minimo relativo e tre punti di flesso per ogni valore positivo di a e b.
2. Dimostra che la regione illimitata compresa tra il grafico di $f(x)$ e il semiasse positivo dell'asse delle ascisse ha un'area finita S pari a $S = \frac{ab}{2}$.
3. Determina per quali valori di a e b il grafico di $f(x)$ presenta un massimo relativo per $x = 2$ e la retta tangente al grafico in $x = 0$ forma con l'asse x un angolo $\alpha = \arctan \frac{\sqrt{2e^3}}{2}$.
4. Supponi che a e b assumano i valori $a = \frac{\sqrt{2e^3}}{2}$ e $b = 8$ che soddisfano le richieste del punto precedente.

Dimostra che la retta normale (perpendicolare alla tangente) in uno dei flessi di ascissa non nulla contiene anche gli altri due flessi.

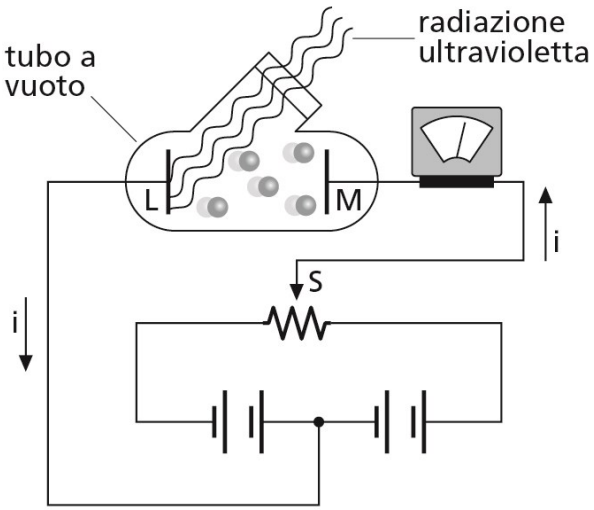
Considera le condizioni sperimentali tipiche per lo studio dell'*effetto fotoelettrico*, cioè l'emissione di elettroni da una superficie metallica colpita da un fascio di radiazione elettromagnetica (vedi figura). Supponi che, in queste condizioni, un'area

$S_L = 4{,}00\ \text{cm}^2$

del catodo metallico L (sodio metallico, potenziale di estrazione $W_0 = 2{,}36\ \text{eV}$) sia uniformemente illuminata da una radiazione ultravioletta di lunghezza d'onda $\lambda = 400\ \text{nm}$, la cui intensità in W/m^2 varia nel tempo, in secondi, come la funzione:

$$I(t) = \frac{f(t)}{e\sqrt{2e}} = Ate^{-\frac{t^2}{B}}, \quad \text{per } t \geq 0,$$

dove $A = 0{,}50\ \text{W/(s} \cdot \text{m}^2)$ e $B = 8{,}0\ \text{s}^2$.



5. Supponi che la distanza tra il catodo L e l'anodo M sia $d = 10{,}0\ \text{cm}$ e che un elettrone con energia cinetica massima K_e esca con velocità diretta perpendicolarmente alle superfici degli elettrodi. Dopo aver ricavato l'espressione dell'energia cinetica massima K_e in funzione della frequenza della radiazione, calcola il minimo valore V_{min} della differenza di potenziale che deve essere applicata tra gli elettrodi per frenare gli elettroni con energia cinetica massima in modo da ridurre a zero la corrente (potenziale di arresto) e il tempo impiegato da un elettrone con energia cinetica massima a compiere il tratto d quando la differenza di potenziale è pari a V_{min}.

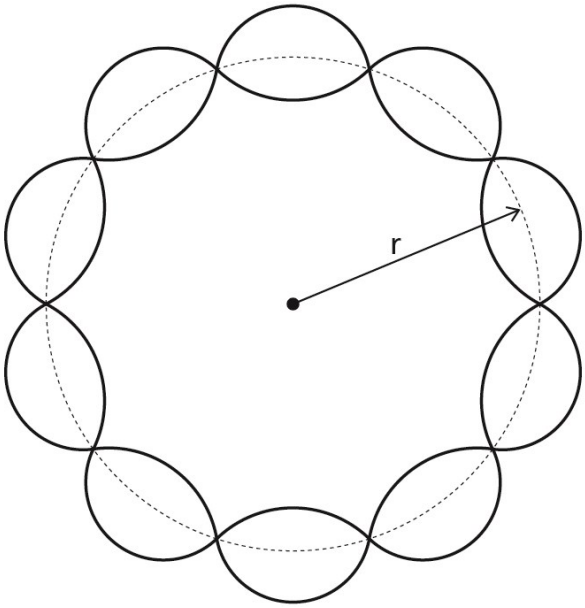
6. Supponi che solo il 20% dell'energia che colpisce in ogni istante il catodo sia assorbita dagli elettroni che sono emessi con la massima energia cinetica. Stima il numero di tali elettroni che vengono emessi in un secondo dal catodo, nel momento in cui l'intensità di irraggiamento $I(t)$ raggiunge il suo massimo.

Problema n. 4: l'atomo di Bohr; studio di funzione e distribuzione di probabilità

Riassumi il contesto storico in cui opera il Progetto Manhattan , la questione della responsabilità etica dello scienziato e dell'Obiettivo 16 dell'Agenda 2030. Risolvi il seguente problema.

1. Nel modello semiclassico dell'atomo di Bohr, l'elettrone gira attorno al nucleo su orbite quantizzate. Mostra come è possibile ricavare il raggio di Bohr e calcolane il valore r_B.

2. Assumi per l'elettrone una struttura ondulatoria stazionaria come in figura e verifica l'ipotesi di quantizzazione di Bohr.



3. Nel modello ondulatorio di Schrödinger, la densità di probabilità di "trovare l'elettrone nello stato fondamentale $(n = 1)$ alla distanza r dal nucleo" è data dalla funzione

$$p(r) = \frac{4}{r_B^3} r^2 e^{-\frac{2r}{r_B}}.$$

Studia la funzione $p(r)$, senza calcolare la derivata seconda e verifica che il massimo della funzione coincide con il raggio di Bohr.

4. Calcola l'area sottesa dalla curva e verifica che è uguale a 1. Commenta il significato fisico del risultato.

Problema n. 5: moto di un punto materiale e massimi, minimi e flessi

Analizza la nascita del calcolo infinitesimale ad opera di Leibnitz e Newton e il concetto di limite dal punto di vista filosofico. Risolvi il seguente problema.

Considera la famiglia di funzioni

$$f_k(x) = \frac{4x}{k} e^{1-\frac{x}{k}}, \quad \text{con } k > 0 \quad \text{e} \quad x \in [0; +\infty[.$$

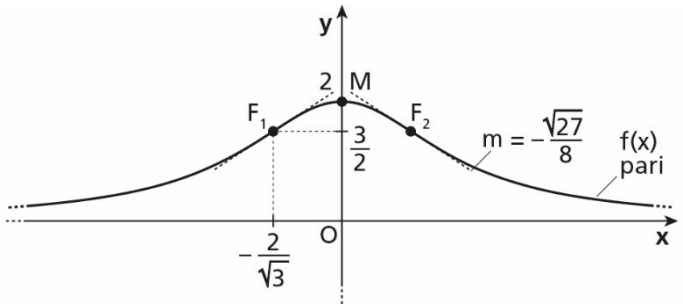
1. Verifica che ciascuna funzione ammette un massimo assoluto e un flesso e che, al variare di k, tali punti appartengono a due rette orizzontali. Determina le equazioni delle due rette.
2. Enuncia il teorema della media.
3. Verifica che il valor medio della funzione $f_k(x)$ nell'intervallo $[0; k]$ è indipendente dal valore di k.

Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi lungo l'asse x di un sistema di riferimento cartesiano in cui le distanze sono misurate in metri. La legge oraria del punto materiale è data dalla funzione $x(t) = f_1(t)$ per $t \geq 0$ con le opportune unità di misura.

4. Determina la velocità media del punto nell'intervallo $[0; 1]$.
5. Esiste un istante in cui la velocità istantanea è uguale alla velocità media? Perché?
6. Esiste un istante in cui la forza agente sul punto P si annulla? Se la risposta è affermativa, quanto vale in questo caso l'intensità della velocità di P?

Problema n.6: la corrente di spostamento e grafico della derivata

Spiega il funzionamento del defibrillatore e risolvi il seguente esercizio.

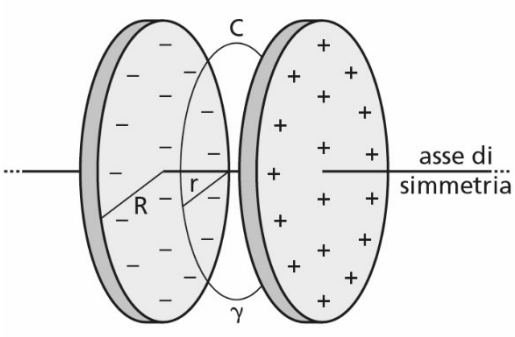


Il grafico in figura rappresenta l'andamento della funzione

$f(x) = \frac{8}{x^2+4}$.

1. Disegna l'andamento probabile del grafico della funzione $f'(x)$, senza eseguire lo studio di funzione. Basati sui dati deducibili dal grafico e motiva le scelte effettuate.
2. Dimostra mediante la definizione di derivata che la derivata di una funzione derivabile e pari è dispari.
3. Puoi dire la stessa cosa delle primitive di una funzione pari?

Un condensatore piano ha le armature di forma circolare e di raggio R. Supponi di poter trascurare gli effetti al bordo.



4. Spiega l'ipotesi di Maxwell delle correnti di spostamento.
5. Determina l'espressione del campo magnetico indotto $B(t)$ a distanza $r < R$ dall'asse del condensatore se l'intensità del campo elettrico tra le armature varia secondo la legge $E(t) = E_0\, f(t)$, con $f(t) = \frac{8}{t^2+4}$.
6. Cosa cambia nell'espressione trovata se $r > R$?

Problema n.7: gli integrali impropri e la relatività ristretta

Analizza l'importanza degli acceleratori di particelle in vari ambiti della ricerca scientifica e risolvi il seguente problema.

Considera la funzione

$$y = f(v) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad \text{con } c \in \mathbb{R}^+.$$

1. Traccia il grafico della funzione nel suo dominio e studiane continuità e derivabilità.

2. Dal grafico di $y = f(v)$ deduci il grafico della funzione $y = \gamma(v) = \frac{1}{f(v)}$.

3. Verifica se la funzione $\gamma(v)$ è integrabile in senso improprio nell'intervallo $[-c; c]$.

La funzione $\gamma(v)$, con $v \geq 0$ e c velocità della luce nel vuoto, è un'importante funzione della fisica: $\gamma(v)$ è il fattore di Lorentz della teoria della relatività ristretta ed è il fattore di dilatazione del tempo misurato da un osservatore che si muove con velocità v rispetto all'osservatore che misura il tempo proprio.

4. Spiega e argomenta questa affermazione.

Un protone si muove di moto rettilineo uniforme, con velocità $v_p = 0{,}900\,c$ rispetto a un elettrone fermo. Il protone urta l'elettrone e dopo l'urto prosegue il suo moto lungo la direzione iniziale, con velocità

$v_p' = 0{,}899\,c$.

5. Qual è la velocità dell'elettrone dopo l'urto? E la sua direzione rispetto alla direzione del protone incidente? Mostra i risultati di un approccio classico al problema e discuti la contraddizione che ne emerge.
6. Riporta la trattazione relativistica dell'urto, facendo riferimento alla definizione relativistica di quantità di moto.

Problema n.8: l'integrale definito e la legge di Faraday-Neumann

1. Calcola l'area della porzione di piano S delimitata dalla funzione $y = \sin x$ e dall'asse x nell'intervallo $[0; \pi]$.
2. Verifica che il periodo della funzione $f(x) = |\sin x|$ è $T = \pi$ e determina il periodo T_k della funzione $f_k(x) = |\sin kx|$ al variare di $k > 0$.
3. Determina i volumi dei solidi di rotazione ottenuti dalla rotazione della superficie S attorno all'asse x e attorno all'asse y.

Se mettiamo in rotazione, con velocità angolare costante ω, una spira quadrata attorno al proprio asse all'interno delle espansioni polari di un magnete otteniamo un alternatore. Supponi la spira sia perpendicolare al campo magnetico nell'istante iniziale e che l'asse di rotazione sia perpendicolare alla direzione del campo magnetico.

4. Indica con B l'intensità del campo magnetico e scrivi l'espressione del flusso magnetico in funzione del tempo.
5. Applica la legge di Faraday-Neumann per trovare la f.e.m. indotta nella spira e scrivi l'intensità della corrente che attraversa una resistenza R.
6. Quanto valgono i valori efficaci della f.e.m. e della corrente indotte?

Problema n 9

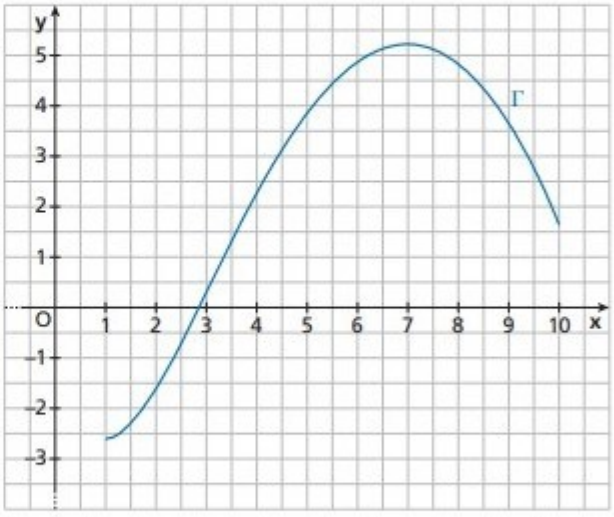
Un laboratorio farmaceutico produce e commercializza un farmaco in polvere. La produzione settimanale del laboratorio può essere al massimo di 10 kg.

a. Il costo marginale di produzione dipende dalla quantità x di farmaco prodotto. Uno studio mostra che, per questa impresa, il costo marginale può essere modellizzato dalla funzione

$$C_m(x) = x + \frac{16}{x+1}, \text{ con } x \in [0;10]$$

dove il costo $C_m(x)$ è in centinaia di euro, mentre x è in kg. Studia la variazione della funzione C_m nell'intervallo $[0;10]$.

b. In economia il costo marginale è la derivata prima della funzione che rappresenta il costo totale di produzione. Determina la funzione C che rappresenta il costo totale settimanale di produzione sull'intervallo $[0;10]$ con $C(0) = 0$.
Il laboratorio produce almeno 1 kg di farmaco in una settimana e tutto il prodotto viene venduto. Il guadagno settimanale, in centinaia di euro, dipende dalla quantità x di farmaco prodotto. La funzione $B(x)$ che modellizza il guadagno settimanale ha il grafico mostrato in figura.
La funzione che corrisponde alla curva è del tipo



$$B(x) = ax^2 + bx - 16\ln(x+1),$$

inoltre $B(10) = 1{,}63$ e $B(x)$ ha un massimo per $x = 7$. Determina i valori dei coefficienti a e b della funzione $B(x)$, arrotondando, se necessario, il valore nel punto $x = 10$ all'unità.

c. Calcola il massimo guadagno corrispondente.

d. Determina la quantità x_0 minima di farmaco che la ditta deve produrre per non andare in perdita approssimando il risultato.

Problema n 10

Analizza l'andamento del contagio da SarsCovid19 registrato nell'anno 2020 e considera la funzione N = N (t) che indichi i contagiati totali dall'inizio della pandemia.

Nella prima fase (febbraio-maggio, giorni 1-100), la pendenza di N(t) aumenta dal giorno 1 fino circa al 30° giorno: il numero totale dei casi N(t) cresce in modo progressivamente più veloce, dunque l'epidemia si sviluppa sempre più velocemente.

Dal 30° giorno fino circa al 100° giorno la pendenza di N(t) diminuisce: il numero totale dei casi N(t) continua a crescere, però in modo progressivamente più lento, dunque l'epidemia rallenta, ma non termina.

Nella fase estiva (giugno-settembre, giorni 100-200) la pendenza di N(t) è molto piccola, i punti del grafico si alzano di poco rispetto all'orizzontale. L'epidemia sembra sotto controllo, perché il totale dei contagi cresce molto lentamente. Comunque già nella seconda metà di agosto (dal giorno 180 in poi) si osserva un aumento della pendenza di N(t).

Nei mesi di ottobre, novembre e dicembre (dal giorno 220 al giorno 312) la pendenza di N(t) dapprima aumenta decisamente sempre più (fino circa alla metà di novembre, giorno 260), poi diminuisce, con qualche fluttuazione fino alla fine della serie (31 dicembre 2020, giorno 312). Dunque il totale dei contagi cresce in modo progressivamente più veloce dal giorno 220 fino a circa al giorno 260, e poi cresce ancora, ma con una crescita progressivamente rallentata, fino alla fine della serie.

Determina una funzione continua e derivabile n=n(t) che approssimi i nuovi contagiati al giorno e mettila in relazione con la funzione N=N(t).

Cosa si può dire dei contagiati totali alla fine della pandemia? Traccia il grafico per i primi 150 giorni.

Problema n 11

Un *collisionatore* è un particolare acceleratore di particelle in cui le particelle accelerate in versi opposti lungo traiettorie circolari vengono fatte collidere frontalmente con velocità uguali e opposte. Le applicazioni spaziano dall'arte alla biologia.

Supponiamo di considerare un elettrone con velocità $v = xc$ (c indica la velocità della luce nel vuoto) nel sistema di riferimento del laboratorio, che collide frontalmente con un positrone (particella che ha la stessa massa dell'elettrone ma carica opposta) che ha velocità uguale e opposta a quella dell'elettrone.



1. Scrivi la funzione $K(x)$ che esprime l'energia cinetica relativistica degli elettroni nel sistema di riferimento del laboratorio e verifica se la funzione $K(x)$ è integrabile in senso improprio nell'intervallo $[-1; 1]$
2. Scrivi l'equazione della fisica classica che permette di esprimere la velocità dell'elettrone misurata dal sistema di riferimento del positrone e indica tale velocità dell'elettrone con $g(x)$.

Nella teoria della relatività ristretta le trasformazioni di Galileo sono sostituite dalle trasformazioni di Lorentz.

3. Scrivi la trasformazione relativistica che permette di esprimere la velocità dell'elettrone misurata nel sistema di riferimento del positrone e indica tale velocità con $f(x)$. Verifica che $|g(x)| \geq |f(x)| \ \forall x \in \mathbb{R}$.
4. Studia la funzione $f(x), x \in \mathbb{R}$ e traccia il suo grafico. Individua la parte di grafico fisicamente accettabile. In questa parte del dominio la funzione $f(x)$ ha un massimo? Riporta anche il grafico di $g(x)$ nello stesso sistema di riferimento cartesiano.
5. Determina per quali valori di x la velocità dell'elettrone nel sistema di riferimento del positrone, calcolato con il modello relativistico, differisce, in valore assoluto, meno del 10% rispetto a quello calcolato con il modello classico.

Prosegue >>

Attualmente si sta valutando la possibilità di realizzare una nuova generazione di acceleratori in cui le particelle accelerate sono i muoni, particelle che hanno una massa $m_{\mu} = 1{,}884 \cdot 10^{-28}\ \mathrm{kg}$ e che a riposo hanno una vita media di $2{,}2\ \mu\mathrm{s}$.

6. Supponiamo che in questi acceleratori i muoni abbiano un'energia di $10\ \mathrm{GeV}$. Determina quale lunghezza possono percorrere muoni di questa energia prima di decadere.

Problema n 12

E' noto che alcuni filosofi dettero importante contributo anche in ambito matematico/fisico. Cita un esempio e risolvi il seguente problema.

Considera la famiglia di funzioni $f_k: [0; +\infty[\to \mathbb{R}$ definite da:

$$f_k(x) = \frac{x}{(x+k)^2},$$

con k parametro reale positivo.

1. Verifica che tutte le funzioni della famiglia hanno un massimo di ascissa k e un flesso di ascissa $2k$.
2. Considera $f(x) = f_1(x)$. Completa lo studio di funzione e disegna il suo grafico in un opportuno sistema di riferimento cartesiano.
3. Studia la convergenza dell'integrale improprio $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$.

Un circuito di resistenza complessiva R è alimentato da un generatore di resistenza interna r e f.e.m. ε.

4. Determina l'espressione della potenza P dissipata per effetto Joule sulla resistenza R in funzione dei dati del problema. Spiega che cosa accade se $R \gg r$.
5. Nel caso particolare in cui $\varepsilon = 25\ \text{V}$ e $r = 1{,}0\ \Omega$, determina per quale valore di R è massima la potenza dissipata e trovane il valore.