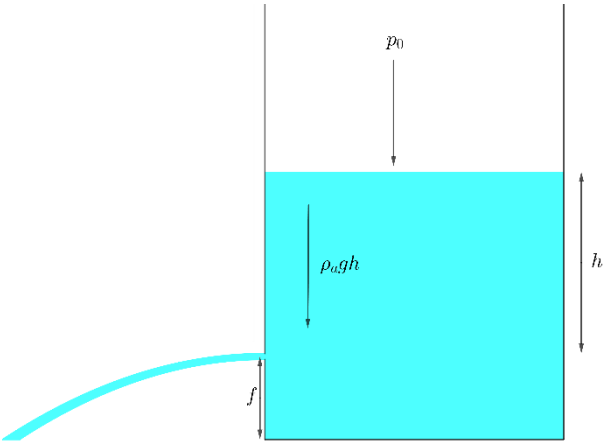
STANISLAO CANNIZZARO
Liceo Scientifico - ROMA

ROMA TRE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI

La pressione è potente:

1° Esperimento - Bottiglia forata con e senza tappo:

Supponiamo di avere la seguente situazione: una bottiglia con un foro ad altezza f rispetto alla base, riempita con acqua fino ad un'altezza h rispetto al foro, come mostrato in figura.



Consideriamo diversi casi:

- **Se non c'è il tappo sulla bottiglia, l'acqua esce:**

A livello del foro dentro la bottiglia agiscono due pressioni: la pressione atmosferica $p_0 = 1,013 \cdot 10^5 Pa$ e la pressione dovuta alla colonna d'acqua, $p_a = \rho_a gh$. Perciò internamente si avrà che:

$$p_{int} = p_0 + \rho_a gh$$

Sul foro all'esterno agisce invece la sola pressione atmosferica:

$$p_{ext} = p_0$$

Di conseguenza, essendo $p_{int} > p_{ext}$ la differenza di pressione comporta una forza netta che agisce sul foro dall'interno causando lo zampillio dell'acqua fuori dalla bottiglia.

Ciò fa sì che il livello d'acqua all'interno della bottiglia cominci a scendere, facendo aumentare lo spazio vuoto (ma pieno d'aria) al di sopra del liquido.

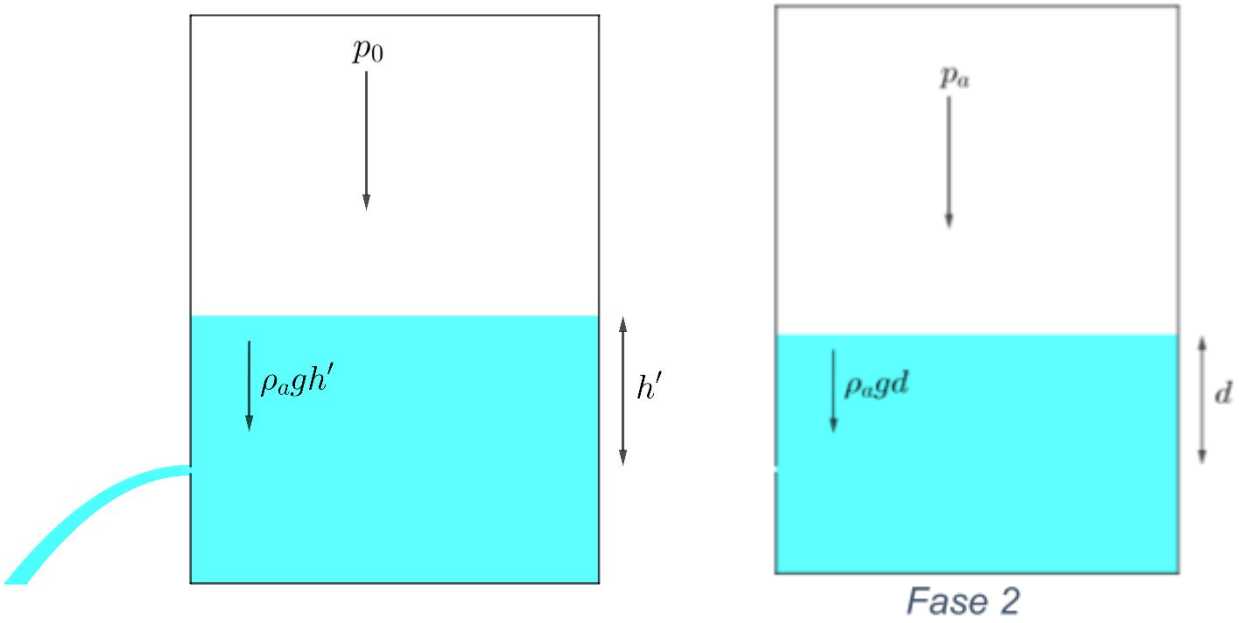
- **Se c'è il tappo sulla bottiglia, l'acqua si ferma:**

Quando si chiude il tappo della bottiglia, si osserva che il flusso di acqua comincia a diminuire finché non si arresta del tutto. Il tutto in tempi molto rapidi.

Distinguiamo due fasi:

- **1ª fase:**

Nell'istante in cui si chiude la bottiglia, lo zampillio non è ancora cominciato a diminuire e l'acqua sta ad una certa quota h' rispetto all'altezza del foro (che ha raggiunto mentre la bottiglia era ancora senza tappo e l'acqua usciva).



- **2ª fase:**

Lo zampillo diminuisce di intensità fino ad arrestarsi portando l'acqua ad un nuovo ultimo liv ion differisce molto da h' ($h' - d$ è piccolo).

Questa seconda fase è quella più importante: il tappo chiuso impedisce che nella bottiglia entri aria aggiuntiva via via che diminuisce il livello di acqua. Di conseguenza la quantità di aria (la sua massa) all'interno della bottiglia rimane costante e, via via che l'acqua scende di livello da h' fino a d, aumenta il volume nella quale è rinchiusa. Aumentando il volume diminuisce la densità e ciò comporta che l'aria all'interno della bottiglia non eserciti più una pressione pari a p_0 (come nella prima parte dell'esperienza) ma una pressione p_a minore (legge dei Boyle-Mariotte che studierete più avanti).

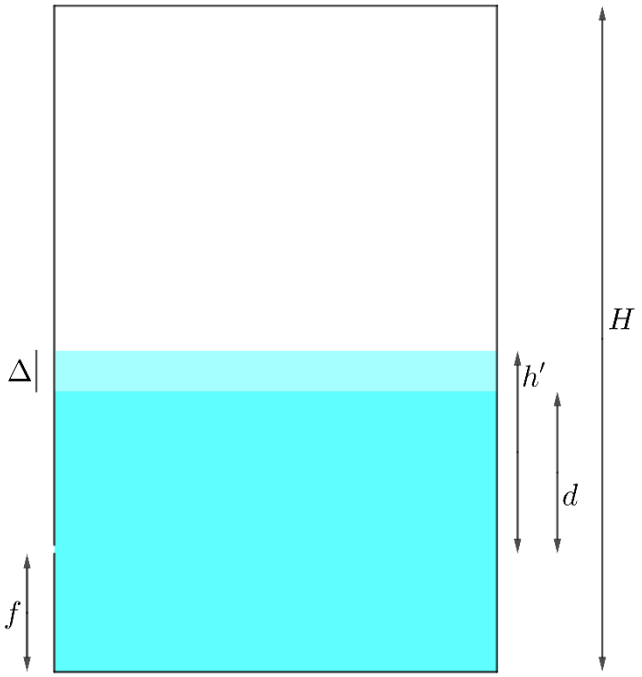
L'effetto combinato della diminuzione della pressione dell'aria e di quella idrostatica dell'acqua fa sì che la differenza di pressione con l'esterno (e quindi la forza che agisce dall'interno sul foro) diventi sempre più piccola, consentendo al flusso di acqua dal foro di diminuire di intensità.

L'acqua smetterà di uscire dal foro quando il sistema avrà raggiunto l'equilibrio nel transiente dalla 1ª alla 2ª fase: la pressione interna sul foro sarà pari a quella esterna (che è sempre quella atmosferica p_0) e l'acqua avrà l'altezza finale d (rispetto all'altezza del foro).

Perciò all'equilibrio finale:

$$p'_{int} = p_{ext}$$

$$p_a + \rho g d = p_0$$



Formalizzazione matematica:

Schematizziamo la bottiglia come un cilindro alto H, con un foro ad altezza f dalla base del cilindro. Supponiamo che appena si chiude la bottiglia, il liquido si trovi ad un'altezza h' rispetto al foro: in questa condizione l'aria esercita ancora una pressione pari a quella atmosferica p_0 all'interno di un volume:

$$V_0 = \pi r^2 (H - (h' + f)).$$

Indichiamo con d il nuovo livello (rispetto al foro) che raggiunge l'acqua all'equilibrio.

Il nuovo volume occupato dall'aria è:

$$V = \pi r^2 (H - (d + f))$$

La nuova pressione dell'aria è determinata applicando la legge di Boyle-Mariotte:

$$p_0 V_0 = pV$$

$$p = p_0 \frac{H-(h'+f)}{H-(d+f)}$$

Risulta evidente che la pressione p è sempre minore di p_0.

Per quanto riguarda l'acqua, la pressione che esercita sul foro all'equilibrio è:

$$p_a = \rho_a g d$$

All'equilibrio si deve avere:

$$p_0 \frac{H-(h'+f)}{H-(d+f)} + \rho_a g d = p_0$$

$$\Rightarrow \rho_a g d^2 - \left[p_0 + \rho_a g (H - f)\right] d + p_0 h' = 0$$

Per capire l'ordine di grandezza dell'abbassamento d'acqua, possiamo trascurare il termine di secondo grado ed ottenere che:

$$d = p_0 \frac{h'}{p_0 + \rho_a g (H-f)}$$

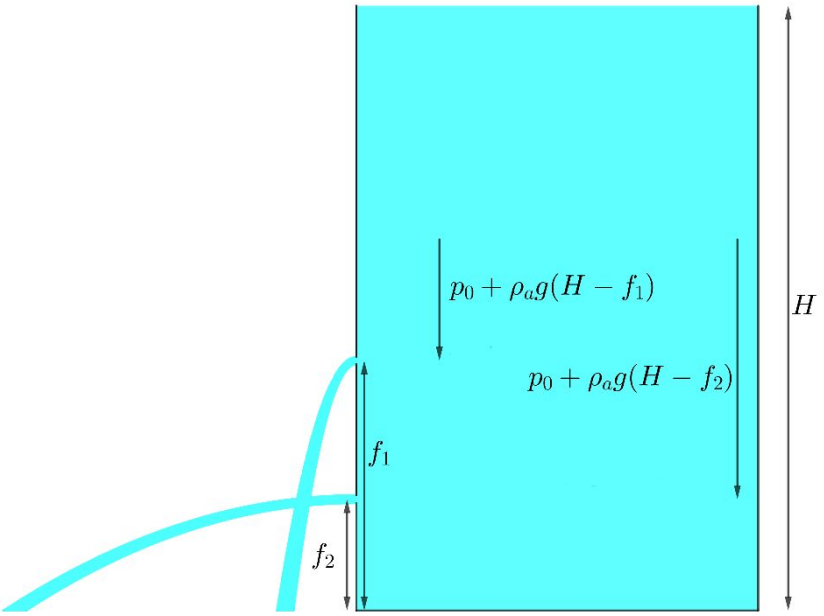
La differenza $\Delta = h' - d$ risulta essere:

$$\Delta = h' \frac{1}{1 + \frac{p_0}{\rho_a g (H-f)}}$$

Si può fare un esempio numerico: presa una bottiglia alta $H \simeq 20\ cm$ riempita fino a $h' = 15\ cm$ d'acqua a partire dalla base e con un foro alto $f \simeq 5\ cm$ dalla base, ne viene che $\Delta \simeq 2\ mm$.

2° Esperimento - Bottiglia con 2 fori con e senza tappo:

Supponiamo ora di avere una bottiglia piena d'acqua con due fori: il più in alto ad un'altezza f_1 dalla base mentre il più basso ad un'altezza f_2. Consideriamo le due situazioni:



- **Se non c'è il tappo, l'acqua esce da entrambi i fori:**

L'acqua esce da entrambi i fori: il getto del foro più in basso è più teso dell'altro come conseguenza della legge di Stevino. Supponendo infatti di aver riempito tutta una bottiglia alta H, sul foro più in alto agisce una pressione pari a $p_1 = p_0 + \rho_a g(H - f_1)$ mentre su quello più in basso la pressione vale $p_2 = p_0 + \rho_a g(H - f_2)$. Poiché risulta $f_1 > f_2$ (vedi disegno), ne viene che la pressione esercitata sul foro più in basso è maggiore di quella esercitata su quello più in alto $p_2 > p_1$: di conseguenza sul secondo foro (supponendo che entrambi i fori siano uguali) agisce una forza maggiore di quella che agisce sul primo foro ($p = F/A$ essendo A l'area del foro) e quindi il getto arriva più lontano.

- **Se c'è il tappo:**

Supponiamo di chiudere ora il tappo della bottiglia. Distinguiamo due fasi:

- **1ª fase:**

Non appena si chiude la bottiglia, a livello del foro più alto si interrompe il flusso di acqua ma si formano delle bolle di aria che salgono. A livello del foro più basso si osserva che il getto continua a fuoriuscire ma con un andamento piuttosto irregolare (a "singhiozzo") che aumenta periodicamente ogni qual volta si forma la bolla d'aria.

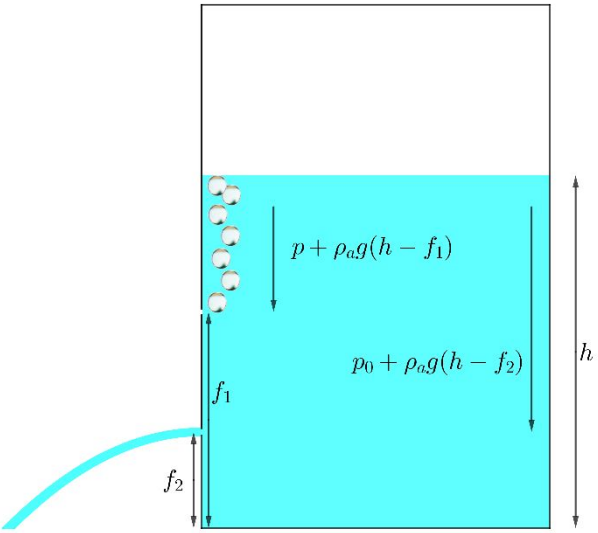
- **2ª fase:**

Quando l'acqua è scesa sotto il livello del primo foro, si rinstaura un flusso normale a livello del secondo foro (come nel precedente esperimento) che si interrompe quando il livello d'acqua arriva in corrispondenza del foro.

Vediamo di spiegare le situazioni:

- **1ª fase:**

Appena si è chiusa la bottiglia, l'aria all'interno si trova ad una pressione pari a quella atmosferica p_0.



Il getto a livello del foro più in alto non si arresta subito ma diminuisce gradualmente. Questa fase è impercettibile in quanto la variazione del livello d'acqua all'interno della bottiglia è dell'ordine del millimetro e perciò non è apprezzabile.

Di conseguenza l'aria all'interno si ritrova ad avere un volume più ampio nel quale stare. L'espansione dell'aria comporta una diminuzione della sua pressione: sulla superficie dell'acqua agirà una pressione minore di quella atmosferica (valore al quale si trovava non appena chiusa la bottiglia).

Nel complesso sul foro più in alto agirà una pressione totale minore di quella esterna: perciò si crea una differenza di pressione con l'esterno che richiama aria consentendo la creazione delle bolle.

Per spiegare invece il particolare andamento dell'efflusso d'acqua al livello del foro più in basso possiamo osservare che non appena si forma una bolla, l'aria che entra dal foro e gonfia la bolla provoca un'onda di pressione che si trasmette in tutte le direzioni in ugual modo (principio di Pascal). In corrispondenza del secondo foro ciò si traduce in una forza che preme sullo stesso aumentando ogni volta il flusso d'acqua ("gli dà una piccola spinta").

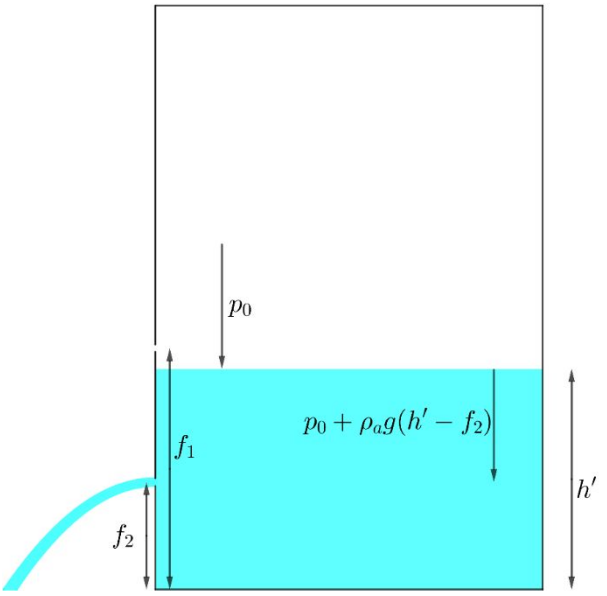
Il processo non è propriamente istantaneo: detto Δt il tempo impiegato dall'onda di pressione per propagarsi dall'alto del primo foro al secondo foro in basso e v la velocità del suono nell'acqua:

$$\Delta t = \frac{f_1 - f_2}{v} \simeq \frac{5 \cdot 10^{-2}}{1484} \simeq 0.03\ ms$$

avendo usato come distanza tra i due fori un valore sperimentale. Considerando che un'immagine impiega circa $66\ ms$ ad impressionarsi sulla retina di un uomo medio, ne risulta che il tempo Δt non è percepibile e quindi sembra che l'aumento di flusso d'acqua sia istantaneo rispetto alla creazione della bolla.

- **2ª fase:**

Quando l'acqua va più in basso del primo foro, la situazione è simile a quella che si presenta nel caso di una bottiglia con un solo foro con l'eccezione del fatto che ora, all'interno della bottiglia, l'aria ha sempre una pressione pari a quella atmosferica p_0. Infatti, ogniqualvolta l'aria aumenta di volume (poiché cala il volume d'acqua, lasciando spazio da riempire) e si verifica un abbassamento di pressione, la depressurizzazione richiama nuova aria dall'esterno grazie alla presenza del primo foro che permette di riequilibrare la pressione dell'aria nella bottiglia.



Perciò sul foro in basso agisce una pressione pari a:

$$p_2' = p_0 + \rho_a g(h' - f_2)$$

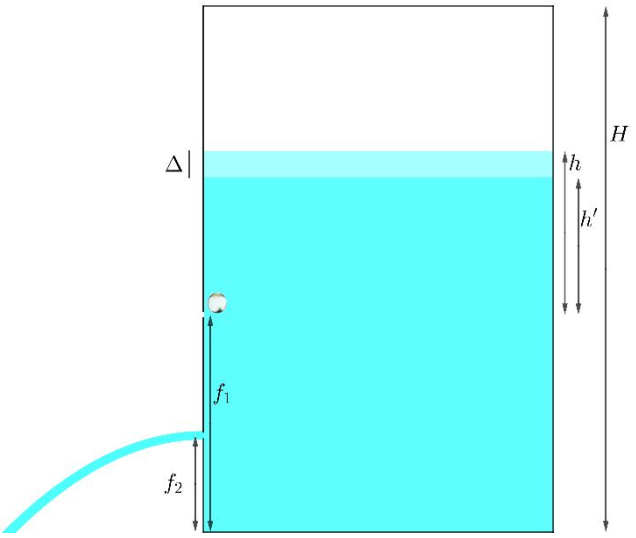
dove h' è la nuova altezza dell'acqua rispetto al fondo della bottiglia.

L'afflusso di acqua si interrompe quando la pressione interna sul foro è uguale a quella esterna:

$$p_2' = p_0$$

Cioè quando $h' = f_2$, ovvero quando l'acqua arriva allo stesso livello del foro.

Formalizzazione matematica (della fase 1):



Schematizziamo la bottiglia come un cilindro alto H, con un foro ad altezza f_1 dalla base della bottiglia ed uno ad altezza f_2.

Sia inoltre h il livello d'acqua rispetto al primo foro. A seguito dell'espansione di aria all'interno della bottiglia, la colonna d'acqua diminuisce di una quantità Δ (vedere la prima esperienza) e l'acqua al di sopra del primo foro si porta ad un'altezza pari ad h'.

Durante l'espansione, la pressione della colonna d'aria diventa (legge di Boyle-Mariotte):

$$p = p_0 \frac{H-(h+f_1)}{H-(h'+f_1)}$$

Mentre la pressione idrostatica che agisce a livello del primo foro è $p_a = \rho_a g h'$.

La condizione affinché si formino le bolle è che la pressione atmosferica esterna che agisce sul foro sia maggiore di quella che agisce all'interno. Ovvero che:

$$p + \rho_a g h' < p_0$$

$$\Rightarrow \rho_a g h' + p_0 \frac{H-(h+f_1)}{H-(h'+f_1)} < p_0$$

$$\Rightarrow \rho_a g h' < p_0 \frac{\Delta}{H-(h'+f)}$$

avendo introdotto $\Delta = h - h'$.

Ragionando per ordini di grandezza, tenendo presente che sia $H-(h'+f)$ che h' sono dell'ordine del centimetro e che la variazione di livello Δ è dell'ordine del millimetro, si ha che:

$$10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-2} < 10^5 \cdot \frac{10^{-3}}{10^{-2}}$$

$$\Rightarrow 10^2 < 10^4$$

Quindi effettivamente la pressione all'interno della bottiglia a livello del primo foro è minore di quella che agisce all'esterno e quindi da questo entra aria.

3° Esperimento - Bottiglia senza fondo in una vasca con una pallina da ping-pong:

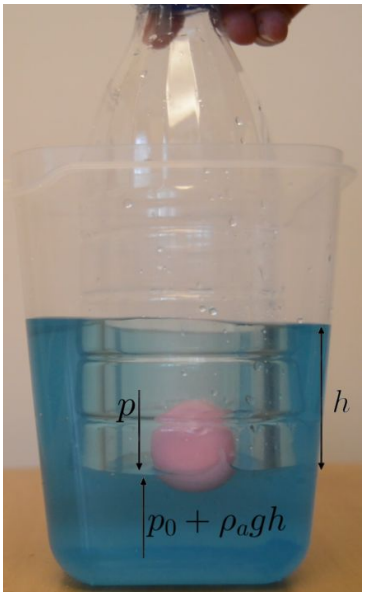
In quest'ultimo esperimento consideriamo una bottiglia senza fondo, un recipiente con dell'acqua ed una pallina di plastica. Nella configurazione iniziale la pallina galleggia sulla superficie dell'acqua. Appoggiamo la bottiglia (approssimata a cilindro) sulla superficie dell'acqua: la bottiglia galleggia.

Spingiamo ora verso il basso la bottiglia con il tappo:

Osserviamo che:

- si innalza il livello dell'acqua esterno alla bottiglia:

L'aria all'interno della bottiglia va ad occupare il posto dell'acqua la quale non può far altro che uscire fuori dalla bottiglia ed alzare il proprio livello nel recipiente (trascuriamo qui il volume di liquido spostato dalla bottiglia).



- la pallina comincia ad affondare:

La forza della mano che preme sulla bottiglia si trasmette all'aria al suo interno: quest'aria preme sulla pallina facendola affondare.

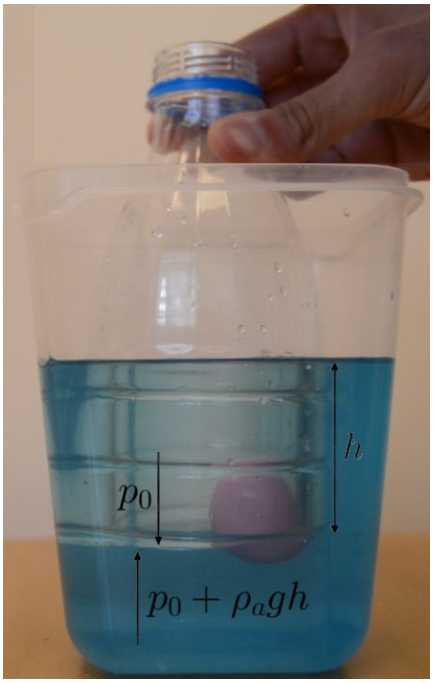
- l'acqua non entra all'interno della bottiglia man mano che la si immerge:

Questo perché alla spinta dal basso verso l'alto sul fondo della bottiglia dovuta ad una pressione pari a $p_0 + \rho_a gh$ (essendo h l'altezza della colonna d'acqua esterna) si contrappone la pressione dell'aria all'interno della bottiglia e quella dovuta all'azione della forza premente sul tappo.

Più la bottiglia viene immersa in profondità nel contenitore, più la pallina viene spinta giù finché non raggiunge e tocca il fondo del recipiente. L'aria che non può uscire dalla bottiglia è andata ad occupare un ugual volume dentro l'acqua spostando il liquido che ha trovato davanti a sé che va ad aumentare il livello di quello nel recipiente.

A questo punto possiamo fare in sequenza le seguenti operazioni:

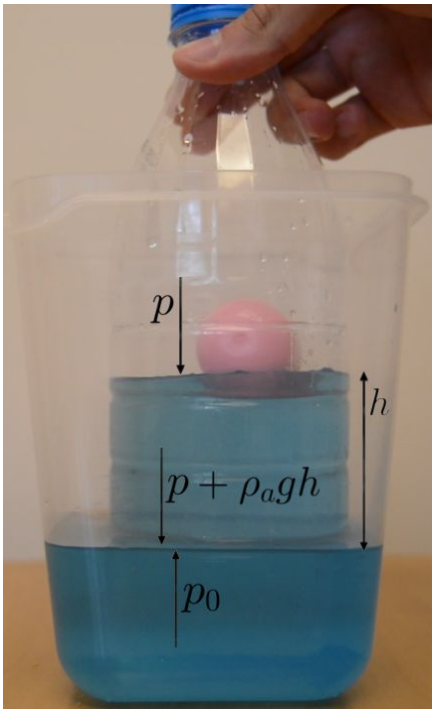
1. **Svitiamo il tappo:**



L'aria che premeva sul tappo fuoriesce dalla bottiglia: la differenza tra la pressione interna e quella esterna viene annullata. All'interno della bottiglia viene quindi ripristinata la pressione atmosferica p_0 che agisce sopra la superficie dell'acqua. Sotto la superficie invece continua ad agire la pressione della colonna d'acqua esterna $p_0 + \rho_a gh$. Poiché quest'ultima è maggiore dell'altra, la forza che risulta dalla differenza è diretta verso l'alto permettendo all'acqua all'interno della bottiglia di risalire e, con essa, anche alla pallina.

I livelli d'acqua esterno ed interno si portano ad una condizione di equilibrio nella quale si trovano alla stessa altezza dal fondo del recipiente in quanto su entrambe le superfici d'acqua agisce la stessa pressione che è quella atmosferica.

2. **Richiudiamo la bottiglia:**



Una volta chiusa la bottiglia, se la si solleva, si osserva che il livello dell'acqua al suo interno comincia a salire (si vede che la pallina comincia a salire) mentre quello all'esterno, di conseguenza, scende. L'acqua continua a salire fin tanto che il fondo aperto della bottiglia si trova al di sotto del livello al quale si trova esternamente l'acqua nel recipiente. Non appena il fondo della bottiglia si trova alla stessa quota dell'acqua nel recipiente, la bottiglia si svuota. Cerchiamo di capire cosa accade.

Non appena si comincia ad estrarre la bottiglia, l'acqua al suo interno scende di livello in modo impercettibile (dovuto alla gravità ed alla tensione superficiale). Ciò comporta che l'aria nella bottiglia aumenta di poco il

proprio volume diminuendo di pressione: questa depressurizzazione è visibile mettendo un telo al posto del tappo ed osservando che viene leggermente "risucchiato" verso il basso.
Viene generata una forza verso l'alto che solleva la colonna d'acqua all'interno della bottiglia.
Detta a_0 l'altezza iniziale dell'aria all'interno della bottiglia non appena è stata chiusa, a pressione atmosferica p_0, e a l'altezza raggiunta a seguito della depressurizzazione che porta l'aria ad una pressione pari a p (legge di Boyle-Mariotte):

$$p_0 V_0 = pV \longrightarrow p = p_0 \frac{V_0}{V} = p_0 \frac{S \cdot a_0}{S \cdot a} = p_0 \frac{a_0}{a}$$

Affinché l'acqua non scendi, deve accadere che la pressione che spinge da sotto la superficie dell'acqua (all'interno della bottiglia) sia uguale a quella che spinge da sopra:

$$p_0 = p + \rho_a g h = p_0 \frac{a_0}{a} + \rho_a g h$$

$$\Longrightarrow a = \frac{1}{1+\frac{\rho_a g}{p_0} h} a_0$$

Possiamo valutare di quanto scenda l'acqua nella bottiglia, ossia calcolare $\Delta a = a_0 - a$ cioè di quanto vari l'acqua all'interno della bottiglia:

$$\Delta a = a_0 - a = a_0 \frac{1}{1+\frac{p_0}{\rho_a g h}}$$

Sostituendo i valori per p_0, ρ_a e g:

$$\Delta a = a_0 \frac{1}{1+\frac{10^5}{10^4 h}} = a_0 \frac{1}{1+\frac{10}{h}} = a_0 \frac{h}{h+10}$$

Poiché h è molto più piccolo di 10, essendo dell'ordine di qualche centimetro ($h \tilde{} 0.01$), $h \ll 10$ e quindi si può approssimare $h + 10 \tilde{} 10$.

$$\Delta a \simeq \frac{1}{10} a_0 h$$

Se supponiamo che l'acqua nella bottiglia si innalzi di 10 cm e che l'aria inizialmente occupasse un volume alto qualche centimetro, ne viene che la variazione di livello d'aria Δa è dell'ordine del decimo di mm e quindi molto piccolo:

$$da = 10^{-1} \cdot 10 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-2} = 10^{-4}\ m = 0.1\ mm$$

Una volta poi che il fondo della bottiglia si trova alla stessa quota dell'acqua nel recipiente, la bottiglia si svuota in quanto all'acqua mancano le pareti alle quali il liquido aderisce grazie alla tensione superficiale. Perciò per effetto della gravità, l'acqua casca.