Esempi di funzioni

Tratteremo alcuni esempi di funzioni ispirati al gioco del calcio.
In quel che segue x e y saranno numeri interi positivi (tranne la y nel caso 4) che sarà un numero razionale, ma gli esempi e le funzioni sono definite anche per x e y reali positivi).

1) In un campionato di calcio con partite di andata e ritorno con x squadre, quante sono le partite y che ogni squadra deve giocare?

Assegnamo dei valori di x e troviamo i corrispondenti valori di y.

x	y
2	2
3	4
4	6
5	8
6	10

Alla fine troviamo che la legge che lega x ad y è:

$$y = 2(x - 1) = 2x - 2.$$

Proviamo a disegnare i punti della tabella sul piano cartesiano e a "congiungerli". Che tipo di grafico viene fuori?
Una retta.

2) In un campionato a 6 squadre (con partite di andata e ritorno) se una squadra ha già giocato x partite, quante partite y deve ancora giocare?

Assegnamo dei valori di x e troviamo i corrispondenti valori di y.

x	y
1	9
2	8
3	7
4	6
5	5

Alla fine troviamo che la legge che lega x ad y è:

$$y = 10 - x.$$

Proviamo a disegnare i punti della tabella sul piano cartesiano e a "congiungerli". Che tipo di grafico viene fuori?
Una retta (discendente).

3) In un campionato di calcio con partite di andata e ritorno con x squadre, quante sono le partite y totali giocate?

Assegnamo dei valori di x e troviamo i corrispondenti valori di y.

x	y
2	4
3	12
4	24
5	40
6	60

Alla fine troviamo che la legge che lega x ad y è:

$$y = 2(x-1)x = 2x^2 - 2x.$$

Proviamo a disegnare i punti della tabella sul piano cartesiano e a "congiungerli". Che tipo di grafico viene fuori?
Una parabola.

4) Supponiamo che in un campionato di calcio tutte le x squadre partecipanti siano ugualmente forti e abbiano quindi la stessa probabilità di vincere il campionato (non è decisamente il caso del campionato italiano...). Qual è la percentuale y (espressa come frazione) che ogni squadra ha di vincere il campionato?

Assegnamo dei valori di x e troviamo i corrispondenti valori di y.

x	y
2	1/2
3	1/3
4	1/4
5	1/5
6	1/6

Alla fine troviamo che la legge che lega x ad y è:

$$y = 1/x.$$

Proviamo a disegnare i punti della tabella sul piano cartesiano e a "congiungerli". Che tipo di grafico viene fuori?
Un'iperbole.

5) Nella fase finale del campionato mondiale di calcio le squadre si affrontano in partite a eliminazione diretta, la vincente passa al turno successivo. L'ultimo turno è costituito dalla finale. Se indichiamo con x i turni eliminatori (compreso l'ultimo turno con la finale), quante sono le squadre y partecipanti?

Assegnamo dei valori di x e troviamo i corrispondenti valori di y.

x	y
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32

Alla fine troviamo che la legge che lega x ad y è:

$$y = 2^x.$$

Proviamo a disegnare i punti della tabella sul piano cartesiano e a "congiungerli". Che tipo di grafico viene fuori?
Un'esponenziale.

6) Nella fase finale del campionato mondiale di calcio le squadre si affrontano in partite a eliminazione diretta, la vincente passa al turno successivo. L'ultimo turno è costituito dalle finali per il primo e il terzo posto. Se indichiamo con x il numero delle squadre partecipanti, quanti sono i turni eliminatori y (compreso l'ultimo turno con la finale)?
Notiamo che, dal punto precedente il numero x deve essere una potenza di 2, ovvero deve esistere un numero intero z tale che $x = 2^z$.

Assegnamo dei valori di x e troviamo i corrispondenti valori di y.

x	y
$2 = 2^1$	1
$4 = 2^2$	2
$8 = 2^3$	3
$16 = 2^4$	4
$32 = 2^5$	5

Alla fine troviamo che la legge che lega x ad y è:

$$y = z =: \ln_2 x.$$

Dato $x > 0$ il numero z tale che $x = 2^z$ si chiama logaritmo in base 2 di x e si indica, appunto, con $\ln_2 x$.

Proviamo a disegnare i punti della tabella sul piano cartesiano e a "congiungerli". Che tipo di grafico viene fuori?
Un logaritmo.

7) In un campionato con x squadre, qual è il numero y delle diverse classifiche possibili?
Con "classifiche possibili" intendiamo le diverse posizioni in classifica (senza ex aequo). Per esempio se $x = 3$, ovvero ci sono 3 squadre: A, B, C, allora $y = 6$, infatti le possibili classifiche sono

$$ABC,\ ACB,\ BAC,\ BCA,\ CAB,\ CBA.$$

Assegnamo dei valori di x e troviamo i corrispondenti valori di y.

x	y
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720

Alla fine troviamo che la legge che lega x ad y è:

$$y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots\ldots \cdot (x-2) \cdot (x-1) \cdot x.$$

Dato x numero intero positivo si chiama "x fattoriale", e si indica con $x!$, il prodotto di tutti i numeri interi da 1 ad x, ovvero

$$x! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots\ldots \cdot (x-2) \cdot (x-1) \cdot x.$$

Proviamo a disegnare i punti della tabella sul piano cartesiano e a "congiungerli". Che tipo di grafico viene fuori?
Un fattoriale.

Osservazioni e domande.

i) Osserviamo che in tutti gli esempi, eccetto 2, abbiamo a che fare con funzioni "crescenti", ovvero funzioni per cui all'aumentare di x il valore corrispondente di y cresce. Due sole delle funzioni di sopra sono "decrescenti", ovvero funzioni per cui all'aumentare di x il valore corrispondente di y decresce. Quali?
(la 2 e la 4).

ii) Consideriamo le 5 funzioni crescenti di sopra. Osserviamo che crescono tutte a velocità diverse. Ordinatele da quella che cresce più lentamente a quella che cresce più velocemente.

Soluzione:
6) logaritmo
1) retta
3) parabola
5) esponenziale
7) fattoriale

iii) Eccetto le rette, notiamo che tutte le altre funzioni sono "convesse", ovvero hanno la forma di una (parte di una) valle, oppure sono "concave", ovvero hanno la forma di una (parte di una) collina.
Quali sono convesse?
(3, 4, 5, 7)
Quali sono concave?
(6)